Lösungen: Theoretisches Arbeitsblatt

Armas Scharpegge

DPG Schülertagung 2025

1. Bestimme den nächsten Schnittpunkt eines Strahl $\mathbf{o} + t\mathbf{d}$ mit einer Kugel, die Radius r_{Kugel} und Position $\mathbf{c}$ hat.

   Lösung: Eine Kugel ist über $|\mathbf{r} - \mathbf{c}| = r_{\text{Kugel}}$ definiert, der Strahl über $\mathbf{r} = \mathbf{o} + t\mathbf{d}$. Die Gleichung kann quadriert und mit den Eigenschaften des Skalarproduktes vereinfacht werden:

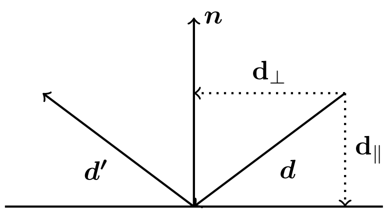
$$
\begin{aligned}
(t\mathbf{d} + (\mathbf{o} - \mathbf{c})) \cdot (t\mathbf{d} + (\mathbf{o} - \mathbf{c})) &= r_{\text{Kugel}}^2 \\
\implies t^2|\mathbf{d}|^2 + 2t\mathbf{d} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) + |\mathbf{o} - \mathbf{c}|^2 - r_{\text{Kugel}}^2 &= 0 \\
\implies t = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{o}) \pm \sqrt{\underbrace{(\mathbf{d} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{o}))^2 - |\mathbf{c} - \mathbf{o}|^2 + r_{\text{Kugel}}^2}_{k}},
\end{aligned}
$$

   wobei $|d| = 1$ benutzt wurde. Es gibt einige Fälle. Wenn die Gerade die Kugel verfehlt, ist $k < 0$, d.h. es gibt keine Lösungen für t. Bei $k = 0$ gibt es genau eine Lösung, d.h. die Gerade liegt tangential an der Kugel. Für $k > 0$ gibt es zwei Lösungen, eine Eintritts- und eine Austrittstelle. Für den nächsten Schnittpunkt mit dem Strahl muss die kleinste positive Lösung gewählt werden. Das ist z.B. für den Fall, dass $\mathbf{o}$ innerhalb der Kugel liegt, wichtig.

2. Wird eine Lampe von einem Tisch entfernt, wird der Tisch dunkler (mit r^2). (Wie) Kann dieser Effekt mit unserer Theorie erklärt werden?

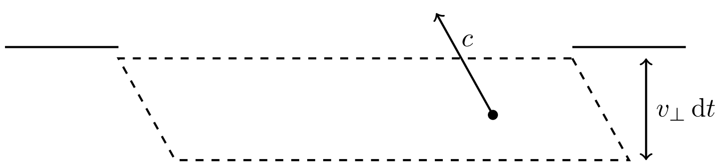
   Lösung: Um die radiance des Tisches in eine Richtung (z.B. Richtung Kamera) zu bestimmen, werden nach der rendering equation alle Richtungen berücksichtigt. Je weiter die Lampe vom Tisch entfernt ist, desto weniger Richtungen zeigen auf die Lampe (d.h. der Raumwinkel, der von der Lampe überdeckt wird, ist kleiner). Praktisch zeigt sich das dadurch, dass weniger zufällig gewählte Richtungen die Lampe treffen. Dadurch wird der Tisch dunkler. Dadurch, dass der Raumwinkel mit $\Omega = \frac{A}{r^2}$ abfällt, ergibt sich der r^2 Zusammenhang.

3. Betrachte eine Oberfläche mit Normalen $\mathbf{n}$, an der ein Strahl mit Richtung $\mathbf{d}$ reflektiert wird. Was ist die neue Richtung des Strahls $\mathbf{d}'$?



   Lösung: $\mathbf{d}$ kann in zwei senkrechte Komponenten $\mathbf{d}_{\parallel}$ und $\mathbf{d}_{\perp}$ zerlegt werden. Dann lässt sich von der Grafik $\mathbf{d}' = \mathbf{d}_{\perp} - \mathbf{d}_{\parallel}$ ablesen. Mit dem Skalarprodukt und $|\mathbf{n}| = |\mathbf{d}| = 1$ folgt $\mathbf{d}_{\parallel} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n}$. Mit $\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\parallel} + \mathbf{d}_{\perp}$ folgt dann $\mathbf{d}' = \mathbf{d} - 2\mathbf{d}_{\parallel} = \mathbf{d} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n}$.

4. Zeige, dass Schwarzkörper Lambertsche Strahler sind (d.h. die radiance in allen Richtungen gleich ist). Betrachte den Schwarzkörper als eine geschlossene Box mit einem kleinen Loch. In der Box befindet sich ein Photonengas, d.h. ihr könnt die Photonen als sich zufällig bewegende Teilchen betrachten. Die Teilchen und deren Wellenlängen sind isotrop verteilt.



Lösung: Betrachte einen kleinen Zeitschritt $\mathrm{d}t$. In der Zeit verlassen alle Photonen aus einem Bereich mit Höhe $v_\perp \, \mathrm{d}t$ den Schwarzkörper. Da das Photonengas homogen und isotrop ist, ist der Energiefluss direkt proportional zum Volumen dieses Bereiches. Das Volumen ist nach dem Prinzip von Cavalieri (Verallgemeinerung der Fläche eines Parallelogramms) proportional zur Höhe $v_\perp \, \mathrm{d}t$. $v_\perp$ hängt dabei von der Bewegungsrichtung der Photonen ab, mit $v_\perp = c \cdot \cos\theta$, wobei θ der Winkel zur Normalen ist. Damit ist direkt $\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}A} \propto \cos\theta$, und daraus folgt $L = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}A\,\cos\theta} = \mathrm{const.}$

Alternativ kann die projizierte Fläche $A^\perp$ auch explizit verwendet werden.

5. „Russian roulette“ bezeichnet eine Methode um Strahlengänge mit einem geringen Beitrag teilweise früher abzubrechen. Dabei wird ein Strahlengang mit einer Wahrscheinlichkeit von p vorzzeitig abgebrochen (d.h. als „Ergebnis“ wird 0 gesetzt). Wenn der Strahlengang nicht abgebrochen wird, muss der Wert aber korrigiert werden. Bestimme den nötigen Wert, damit der Erwartungswert nicht verändert wird.

   Lösung: Wir betrachten das Problem ganz allgemein, sei X eine beliebige Zufallsgröße mit Erwartungswert $E[X]$. Das russian roulette gibt uns eine zweite Zufallsgröße Y. Damit das Verfahren funktioniert, muss $E[X] = E[Y]$. Mit Wahrscheinlichkeit p ist $y = 0$, mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ ist $y = \alpha x$. Dabei soll α ein konstanter Faktor sein, den wir so wählen möchten, dass das Verfahren funktioniert. Also ist $E[Y] = p \cdot 0 + (1-p) \cdot \alpha E[X] = (1-p)\alpha E[X]$. Also muss $\alpha = \frac{1}{1-p}$ sein.

6. Wie könnte man aus zwei oder drei gleichverteilten Zufallsvariablen X, Y, Z über $[0, 1]$ eine gleichverteilte Richtung auf einer Halbkugel bestimmen? Überlegt euch, warum euer Verfahren wirklich gleichverteilte Richtungen erzeugt.

   Lösung: Eine Möglichkeit: Die Zufallsvariablen werden erst auf den Bereich $[-1, 1]$ erweitert ($X' = 2X - 1$ etc.). Der Zufallspunkt (X', Y', Z') ist dann im Quadrat mit Seitenlänge 2 gleichverteilt. Liegt der Punkt in einer Kugel mit Radius 1, kann der Punkt einfach normiert werden, was genau einer Projektion auf die Kugeloberfläche entspricht. Für Punkte außerhalb der Kugel kann man das aber nicht machen, da dort nur Punkte in einigen Richtungen liegen (den Ecken des Quadrats) und damit nicht in alle Richtungen gleichverteilt sind. In dem Fall wird ein neuer zufällige Punkt betrachtet, solange bis einer in der Kugel liegt. Solche Verfahren werden *rejection sampling* genannt.

   Um von einer gleichverteilten Richtung auf einer Kugel zu einer Halbkugel zu kommen, können z.B. alle generierten Richtungen, die in der anderen Halbkugel liegen, umgedreht werden.

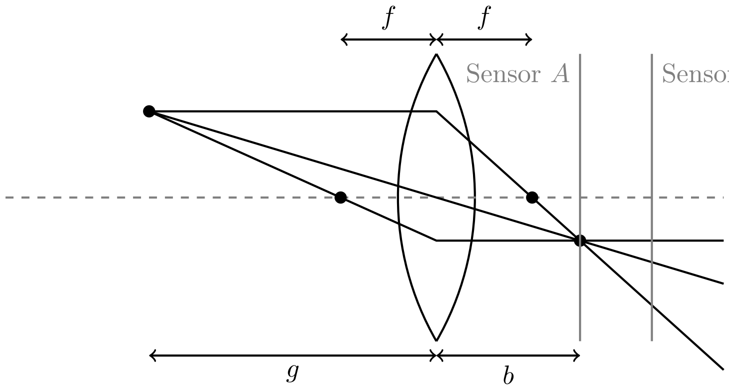
7. Wenn man sich von einem Licht entfernt, erscheint das Bild auf dem Auge gleich hell. Warum können wir dann ohne Gefahr auf Sterne, aber nicht die Sonne schauen?

   Lösung: Sterne sind viele Lichtjahre von uns entfernt, d.h. mindestens 10^5 mal weiter weg als die Sonne und damit ist deren Bild auf unserer Netzhaut auch 10^5 mal kleiner. Die irradiance $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A}$ des Bildes hängt dabei nicht vom Abstand ab, das Bild wird nur kleiner. Die eingefange Gesamtleistung eines Sterns ist gering, aber auf eine sehr kleine Fläche konzentriert. Das Bild der Sonne auf der Netzhaut kann nur einige Millimeter groß sein und damit ist das Bild eines Sterns kleiner als 10 nm. Für diese Größen müssen viele weitere Effekte berücksichtigt werden, und es ist z.B. wichtig, wie scharf *genau* das Bild auf der Netzhhaut ist, welche Unschärfe durch die Atmosphäre entsteht oder wie die Energie im Auge abgeführt wird. Diese Effekte haben bei einem Blick in die Sonne nur einen geringfügigen Einfluss, sind beim Stern aber wesentlich. Die Erfahrung zeigt uns, dass die zusätzlichen Effekte tatsächlich dafür sorgen, dass es sicher ist, mit bloßem Auge zu den Sternen zu schauen.

8. Wie kann eine Linse genutzt werden, um eine Kamera zu bauen? Was sind Unterschiede zur pinhole camera?

   Lösung: Eine Linse bildet Lichtquellen bzw. Gegenstände im Abstand g auf ein Bild mit Abstand b zur Linse entlang der optischen Achse ab. Der Zusammenhang wird durch die Linsengleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ bestimmt. Wird eine Sammellinse ($f > 0$) vor einen Bildsensor im

Abstand b gestellt, können also Gegenstände im Abstand g scharf abgebildet werden. Andere Gegenstände werden nur unscharf dargestellt. Bei der (idealen) pinhole camera sind dagegen alle Gegenstände scharf abgebildet. In der Realität kann man das Loch aber nicht beliebig klein machen, sodass tatsächlich alle Gegenstandsweiten unscharf sind. Da die Bildsensoren eine endliche Sensitivität haben, ist es nötig möglichst viel Licht „einzusammeln“, um auch dunkle Szenen abbilden zu können. Eine Linse kann im Grunde beliebig groß angefertigt werden, währen ein größeres Loch in der pinhole camera zu einem unschärferen Bild führen würde, wenn der Abstand zum Bildsensor gleichbleibt.



Der Gegenstand wird auf Sensor A also scharf abgebildet, nicht aber auf Sensor B.

10. Zeige, dass die radiance entlang eines Strahls konstant bleibt. Betrachte dazu zwei kleine Oberflächen $\mathrm{d}A, \mathrm{d}A'$ mit beliebiger Position und Orientierung. Bestimme für beide Oberflächen die radiance. Dazu muss der Raumwinkel der Flächen aus Sicht der jeweils anderen bestimmt werden.

    Lösung: Wir betrachten genau die Strahlen, die durch beide Flächen gehen und bezeichnen deren radiant flux mit $d^2\Phi$.[1] Nur weil wir uns genau diese Strahlen anschauen ist Φ bei beiden Flächen gleich, allgemein gilt das nicht. Um die radiance $L = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}A^\perp}$ zu bestimmen, ist es nötig die Parameter $\mathrm{d}\omega$ und $\mathrm{d}A^\perp$ zu bestimmen. $\mathrm{d}\omega$ ist also genau der Raumwinkel von $\mathrm{d}A'$ aus der Sicht von $\mathrm{d}A$. Nach der Definition des Raumwinkels folgt $\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}A'^\perp}{r^2}$, wobei r der Abstand zwischen den Flächenstücken ist. Analog $\mathrm{d}\omega' = \frac{\mathrm{d}A^\perp}{r^2}$. Daraus erhalten wir direkt

$$L = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}A^\perp} = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\frac{\mathrm{d}A'^\perp}{r^2}\,\mathrm{d}A^\perp} = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}A'^\perp\,\frac{\mathrm{d}A^\perp}{r^2}} = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}A'^\perp\,\mathrm{d}\omega} = L'.$$

[1] Das d^2 verdeutlicht hier, dass die Größe von zwei anderen kleinen Größen abhängt ($\mathrm{d}A$ und $\mathrm{d}A'$). Verdoppeln wir die eine, wird sich auch $\mathrm{d}^2\Phi$ verdoppeln. Das bedeutet auch, dass man durch zwei andere kleine Größen teilen muss, um wieder eine „normale“ Größe zu erhalten.