Wir schreiben einen Raytracer

Armas Scharpegge

DPG Schülertagung 2025

Universität Bielefeld

3D Rendering

$$\text{3D Szene} \xrightarrow{\text{Rendering}} \text{2D Bild}$$

- Position von Kugeln, Dreiecken
- Materialeigenschaften
- Kameraposition und -eigenschaften

Theorie

Licht

bekannt als

- Photonen
- Elektromagnetische Strahlen
- ...

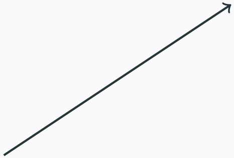
Licht

bekannt als

- Photonen
- Elektromagnetische Strahlen
- ...

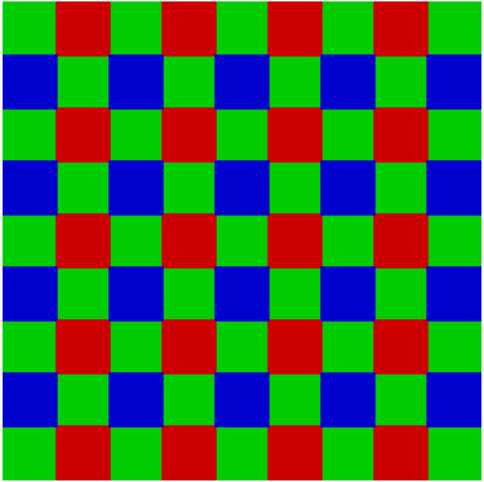
Genauigkeit vs. Rechenaufwand

Geometrische Optik



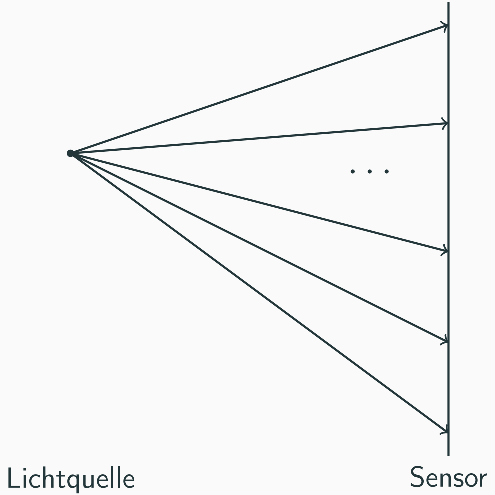
Wie entsteht ein Bild?

Bayer-Muster

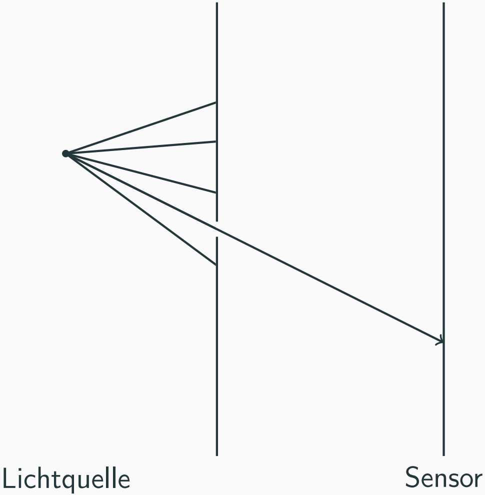


https://en.wikipedia.org/wiki/Bayer_filter

Kamera



Kamera



$\Rightarrow$ Pinhole camera

Farben - CIE 1931

https://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931

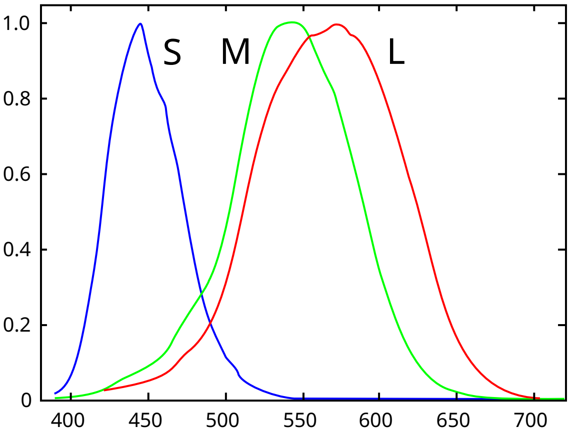


Abbildung 1: Sensitivität der menschlichen Zapfen.

Abb. 1: Vanessaezekowitz at en.wikipedia, CC BY 3.0, via Wikimedia Commons

Color matching

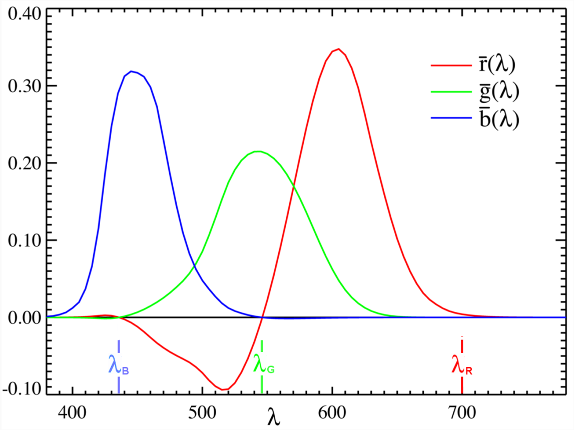
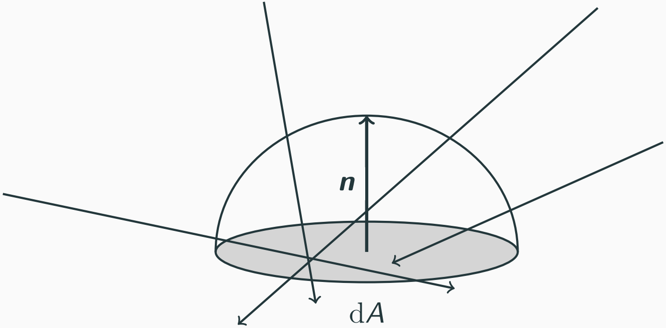


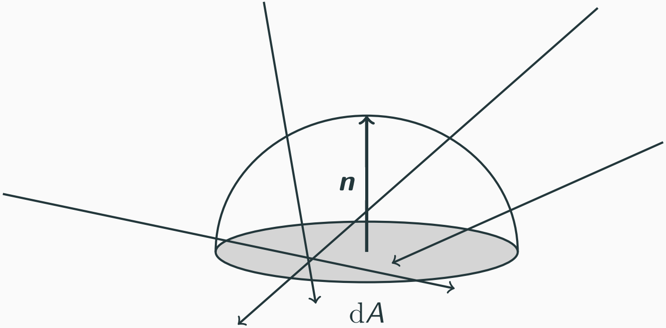
Abbildung 2: RGB-Werte, deren Farbe monochromatischem Licht entspricht.

Abb. 2: PAR, CC0, via Wikimedia Commons

Strahlungsgrößen

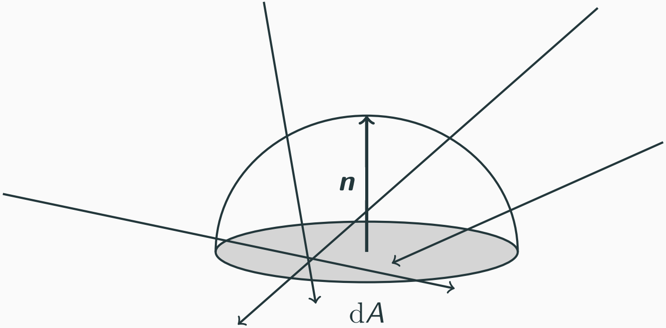


Strahlungsgrößen



Jedes Photon hat eine Energie $\implies$ Einfach aufaddieren.

Strahlungsgrößen



Jedes Photon hat eine Energie $\implies$ Einfach aufaddieren.
Strahlen aus vielen Photonen: Betrachte Leistung $\Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.

Integration

Bekannt: radiant flux $\Phi = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$.
Gesucht: Energie E

Integration

Bekannt: radiant flux $\Phi = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$.

Gesucht: Energie E

Addiere Φ über alle Zeiten auf:

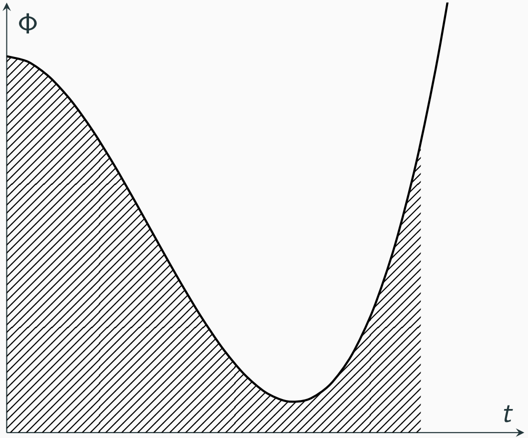
$$E = \int \Phi \,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t$$

Integration

Bekannt: radiant flux $\Phi = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$.
Gesucht: Energie E
Addiere Φ über alle Zeiten auf:

$$E = \int \Phi \,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}E}{\cancel{\mathrm{d}t}} \cancel{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}E$$

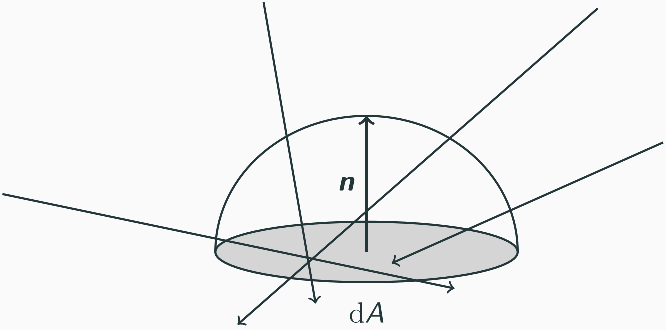
Integration am Graphen



$$\int \Phi \, \mathrm{d}t = \text{Fläche unter Graphen}$$

Irradiance

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A}$$



Raumwinkel vs. Winkel

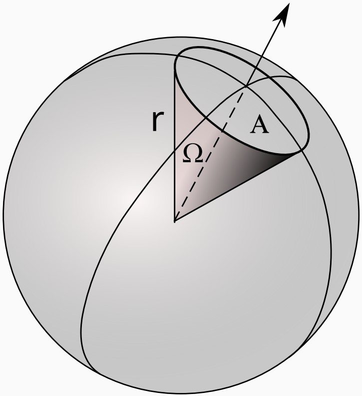


Abbildung 3: Raumwinkel.

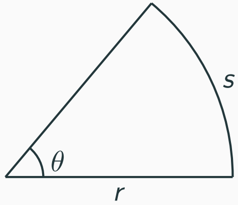


Abbildung 4: Winkel.

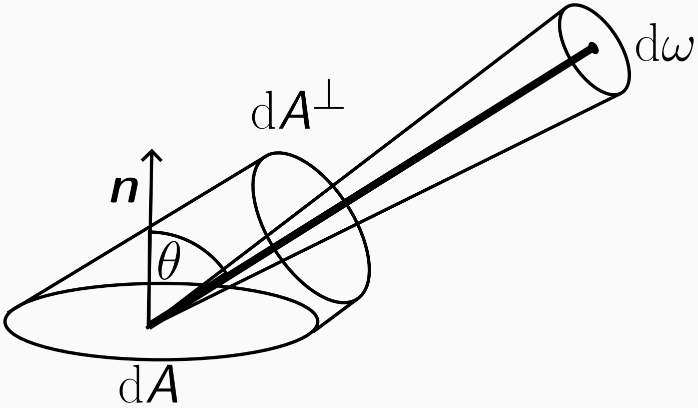
Raumwinkel	**Winkel**
Kugelausschnitt	Kreisabschnitt
$\Omega = \frac{A}{r^2}$	$\theta = \frac{s}{r}$
Voller Raumwinkel: 4π	Voller Winkel: 2π
Steradians sr	Radians rad

Abb. 3: `Solid_Angle.png`: Haade / *derivative work: Habib.mhenni, , via Wikimedia Commons

Radiance

$$L = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}A^\perp}$$

$$\mathrm{d}A^\perp = \mathrm{d}A\cos\theta$$



Radiance

Radiance bleibt entlang eines Strahls gleich.

Radiance

Zeige: Radiance bleibt entlang eines Strahls gleich.

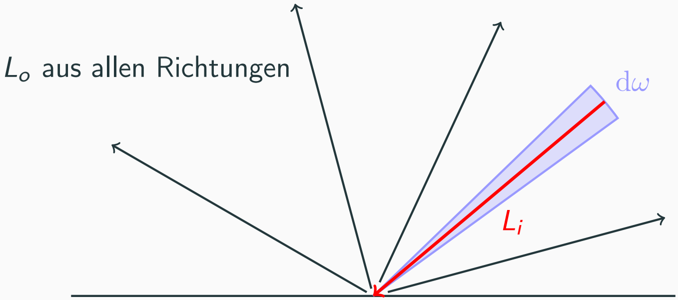
Übersicht

radiant flux $\Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

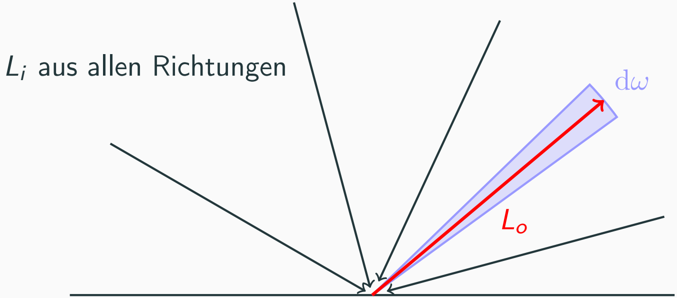
irradiance $E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A}$

radiance $L = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}A^{\perp}} = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}A\,\cos\theta}$

Streuung



Streuung



Material bestimmt, welche Richtungen wie stark in welche anderen Richtungen gestreut werden.

Rendering equation

$$L_o(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = \underbrace{L_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o)}_{\text{Emittiertes Licht}}$$

Rendering equation

$$L_o(\boldsymbol{p}, \omega_o) = \underbrace{L_e(\boldsymbol{p}, \omega_o)}_{\text{Emittiertes Licht}} + \underbrace{\int_{S^2} f(\boldsymbol{p}, \omega_o, \omega_i) \overbrace{L_i(\boldsymbol{p}, \omega_i) |\cos\theta_i| \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}^{\text{irradiance}}}_{\text{Reflektiertes Licht}}$$

Rendering equation

$$L_o(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = \underbrace{L_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o)}_{\text{Emittiertes Licht}} + \underbrace{\int_{S^2} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\omega}_i) \overbrace{L_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i) |\cos\theta_i| \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}^{\text{irradiance}}}_{\text{Reflektiertes Licht}}$$

S^2 ist die Oberfläche der Einheitskugel $\implies$ Alle Richtungen

Rendering equation

$$L_o(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = \underbrace{L_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o)}_{\text{Emittiertes Licht}} + \underbrace{\int_{S^2} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\omega}_i) \overbrace{L_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i) |\cos\theta_i| \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}^{\text{irradiance}}}_{\text{Reflektiertes Licht}}$$

S^2 ist die Oberfläche der Einheitskugel $\implies$ Alle Richtungen

Ohne Transmission nur die obere Halbkugel relevant.

Rendering equation

$$L_o(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = \underbrace{L_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o)}_{\text{Emittiertes Licht}} + \underbrace{\int_{S^2} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\omega}_i) \overbrace{L_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i) |\cos\theta_i| \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}^{\text{irradiance}}}_{\text{Reflektiertes Licht}}$$

S^2 ist die Oberfläche der Einheitskugel $\implies$ Alle Richtungen

Ohne Transmission nur die obere Halbkugel relevant.

f heißt BSDF (bidirectional scattering distribution function).

Praxis

Idee

$$\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{Mittelwert als Integral}}$$

Idee

$$\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{Mittelwert als Integral}} = \underbrace{\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_N)}{N}}_{\text{Mittelwert aus Zufallszahlen}}$$

Genauer

- Erwartungswert bei diskreten Zufallszahlen (z.B. Würfel)

$$E[X] = \sum P_i f(x_i) = P_1 f(x_1) + P_2 f(x_2) + \cdots + P_n f(x_n)$$

- Bei kontinuierlichen (z.B. Position vom Würfel):

$$E[X] = \int f(x) p(x) \, \mathrm{d}x$$

Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF)

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF)

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$
$$\implies P(x_0 \leq x \leq x_0 + \mathrm{d}x) = p(x_0)\,\mathrm{d}x$$

Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF)

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \\
\implies P(x_0 \leq x \leq x_0 + \mathrm{d}x) &= p(x_0)\,\mathrm{d}x \\
P(a \leq x \leq b) &= \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF)

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \\
\implies P(x_0 \leq x \leq x_0 + \mathrm{d}x) &= p(x_0)\,\mathrm{d}x \\
P(a \leq x \leq b) &= \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

z.B. uniform (Gleichverteilung) zwischen a und b: $p(x) = \frac{1}{b-a}$ zwischen a und b, 0 außerhalb

Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF)

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$

$$\implies P(x_0 \leq x \leq x_0 + \mathrm{d}x) = p(x_0)\,\mathrm{d}x$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

z.B. uniform (Gleichverteilung) zwischen a und b: $p(x) = \frac{1}{b-a}$ zwischen a und b, 0 außerhalb

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{?}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF)

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$
$$\implies P(x_0 \leq x \leq x_0 + \mathrm{d}x) = p(x_0)\,\mathrm{d}x$$
$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

z.B. uniform (Gleichverteilung) zwischen a und b: $p(x) = \frac{1}{b-a}$ zwischen a und b, 0 außerhalb

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Monte Carlo Integration

Erwartungswert *experimentell* bestimmen um das Integral zu bestimmen. Wähle x mit PDF $p(x)$, dann

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} g(x_i)}{N} \to \int g(x)p(x)\,\mathrm{d}x$$

Monte Carlo Integration

Erwartungswert *experimentell* bestimmen um das Integral zu bestimmen. Wähle x mit PDF $p(x)$, dann

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} g(x_i)}{N} \to \int g(x)p(x)\,\mathrm{d}x$$

Mit $g(x) = \frac{f(x)}{p(x)}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} g(x_i)}{N} \to \int g(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Welches $p(x)$?

Dort wo $f(x)$ groß ist, sollte häufiger gesampled werden. Am besten $p(x) \propto f(x)$

Welches $p(x)$?

Dort wo $f(x)$ groß ist, sollte häufiger gesampled werden. Am besten $p(x) \propto f(x)$ - Dann müsste man aber $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ schon kennen.

Welches $p(x)$?

Dort wo $f(x)$ groß ist, sollte häufiger gesampled werden. Am besten $p(x) \propto f(x)$ - Dann müsste man aber $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ schon kennen.

Ziel: $\frac{f(x)}{p(x)}$ soll möglichst wenig variieren.

Warum Monte Carlo?

- Diskretisieren des Integrals hat Fehler $\mathcal{O}\left(N^{-d}\right)$ in Dimension d.

Warum Monte Carlo?

- Diskretisieren des Integrals hat Fehler $\mathcal{O}\left(N^{-d}\right)$ in Dimension d.
    - „Fluch der Dimensionen“
- Monte Carlo immer $\mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$.
- Rauschen sieht besser als Artefakte aus.

Raytracing Algorithmus

Bestimme einen Strahl für jeden Pixel, für den die radiance berechnet wird.
Radiance berechnet sich immer so:

1. Finde den ersten Schnittpunkt mit der Szene (inkl. Informationen über die Oberfläche)
2. Bestimme die emittierte radiance und

$$L \cdot \frac{f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\omega}_i)|\cos\theta|}{p(x)}$$

   für eine zufällige Richtung.

Raytracing Algorithmus

Bestimme einen Strahl für jeden Pixel, für den die radiance berechnet wird.
Radiance berechnet sich immer so:

1. Finde den ersten Schnittpunkt mit der Szene (inkl. Informationen über die Oberfläche)
2. Bestimme die emittierte radiance und

$$L \cdot \frac{f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\omega}_i)|\cos\theta|}{p(x)}$$

   für eine zufällige Richtung.

Abbruchbedingung: z.B. eine maximale Tiefe vorgeben (alternativ *russian roulette*)

Lambertsche Oberfläche

Komplette, „gleichmäßige“ Streuung des Lichts (keine Transmission).

Lambertsche Oberfläche

Komplette, „gleichmäßige“ Streuung des Lichts (keine Transmission).

$$f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\omega}_i) = \frac{R}{\pi} \quad 0 \leq R \leq 1$$

Lambertsche Oberfläche

Komplette, „gleichmäßige“ Streuung des Lichts (keine Transmission).

$$f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\omega}_i) = \frac{R}{\pi} \quad 0 \leq R \leq 1$$

Warum π? Weil $\int \cos\theta \, \mathrm{d}\omega = \pi$ (berechnet den Querschnitt einer Halbkugel, was ein Kreis mit bekannter Fläche π)

Lambertscher Strahler

„Gleichmäßiges“ Licht in alle Richtungen.

Lambertscher Strahler

„Gleichmäßiges“ Licht in alle Richtungen.

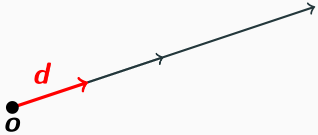
z.B. Schwarzkörper (Strahlung von warmen Objekten)

Richtungen samplen

Richtungen auf der Halbkugel:

- uniform: $p(x) = \frac{1}{2\pi}$
  - da Raumwinkel einer Halbkugel 2π
- *cosine-weighted* $p(x) = \frac{\cos\theta}{\pi}$

Strahl



$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{o} + t\boldsymbol{d} \qquad t \geq 0,\ |\boldsymbol{d}| = 1$$

Schnittpunkt mit einer Kugel

Alle Punkte im Abstand r_{Kugel}.

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c}| &= r_{\text{Kugel}} \\
(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})^2 = (\boldsymbol{r}_x - \boldsymbol{c}_x)^2 + (\boldsymbol{r}_y - \boldsymbol{c}_y)^2 + (\boldsymbol{r}_z - \boldsymbol{c}_z)^2 &= r_{\text{Kugel}}^2
\end{aligned}
$$

Ausblick

- „Physically Based Rendering: From Theory To Implementation“ von Matt Pharr, Wenzel Jakob, und Greg Humphreys
  - `https://pbr-book.org/`
- „Ray Tracing in One Weekend“ von Peter Shirley, Trevor D Black und Steve Hollasch
  - `https://raytracing.github.io/`
- „Monte Carlo Crash Course“ von Max Slater
  - `https://thenumb.at/Probability/`

Ausblick

- „Physically Based Rendering: From Theory To Implementation" von Matt Pharr, Wenzel Jakob, und Greg Humphreys
  - `https://pbr-book.org/`
- „Ray Tracing in One Weekend" von Peter Shirley, Trevor D Black und Steve Hollasch
  - `https://raytracing.github.io/`
- „Monte Carlo Crash Course" von Max Slater
  - `https://thenumb.at/Probability/`

Und: Wie kann man wieder einzelne Strahlen durch die Integrale darstellen?

$\Longrightarrow$ Distributionentheorie

Selber machen

https://ascharpegge.de/dpg25

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \quad L = \frac{\Phi}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}A\cos\theta} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{o} + t\boldsymbol{d} \quad \Omega = \frac{A}{r^2} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x)}{p(x)}$$

Lambertsche BSDF $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\omega}_i) = \frac{R}{\pi}$ uniforme Halbkugel $p(x) = \frac{1}{2\pi}$

$$L_o(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = \underbrace{L_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o)}_{\text{Emittiertes Licht}} + \underbrace{\int_{S^2} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\omega}_i)\overbrace{L_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i)|\cos\theta_i|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}^{\text{irradiance}}}_{\text{Reflektiertes Licht}}$$

`https://ascharpegge.de/dpg25`